Ensayo Olimpiada Matemática Local

Viernes, 12 de enero de 2018

1. Encuentra todos los pares de enteros (x, y) que verifican la ecuación:

$$x^3 + y = 2(x - y)x$$

2. Cada uno de los puntos con coordenadas enteras en el plano se colorea de uno de tres colores: rojo, azul o verde. Se sabe que cada color se ha usado al menos una vez y que los puntos $(0, 0)$ y $(0, 1)$ están coloreados de rojo y de azul respectivamente. Probar que existen tres puntos, cada uno coloreado de un color distinto a los otros dos, tales que son los vértices de un triángulo rectángulo.

3. Sea H el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$. Sea M_A el punto medio del lado BC. Sea G el segundo punto de corte de la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$ con la circunferencia de diámetro AH, demuestra que G, H y M_A son colineares.

4. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$, tales que $a + b + c = 1$ prueba que:

$$(\frac{a}{a-1})^2 + (\frac{b}{b-1})^2 + (\frac{c}{c-1})^2 \geq \frac{3}{4}$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de la prueba es de 3 horas.

SOLUCIONES

1. Encuentra todos los pares de enteros (x, y) que verifican la ecuación:

$$x^3 + y = 2(x - y)x$$

Solución:
Si $x = 0$ necesariamente tenemos $y = 0$, luego el par $(0, 0)$ verifica la ecuación. Si $x \neq 0$, entonces dividiendo entre x vemos que

$$x^2 + \frac{y}{x} = 2(x - y)$$

de dónde necesariamente x divide a y, luego existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $y = kx$, sustituyendo en la ecuación

$$x^2 + k = 2(x - kx)$$

Solución 1: Operando para resolver la ecuación de segundo grado en x.

$$x^2 - 2(1 - k)x + k = 0$$

$$x = \frac{2(1 - k) \pm \sqrt{4(1 - k)^2 - 4k}}{2} = 1 - k \pm \sqrt{(k - 1)^2 - k}$$

Luego necesitamos $(k - 1)^2 - k$ cuadrado perfecto y esto es fácil comprobar que solo ocurre para $k = 0$ y $k = 3$, sustituyendo en la ecuación encontramos las soluciones, los pares (x, kx), que son $(-3, -9), (-1, -3), (0, 0), (2, 0)$.

Solución 2: Dividiendo de nuevo entre x, viendo que $k = k'x$, y factorizando.

$$x + k' = 2(1 - k'x)$$

$$4k'x + 2x + 2k' + 1 = 5$$

$$(2k' + 1)(2x + 1) = 5$$

Luego $(2x + 1) = \pm 1, \pm 5$ y $(2k' + 1) = \pm 5, \pm 1$ son las únicas posibilidades. Las soluciones son los pares $(x, k'x^2)$, que son $(-3, -9), (-1, -3), (0, 0), (2, 0)$.

2. Cada uno de los puntos con coordenadas enteras en el plano se colorea de uno de tres colores: rojo, azul o verde. Se sabe que cada color se ha usado al menos una vez y que los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$ están coloreados de rojo y de azul respectivamente. Probar que existen tres puntos, cada uno coloreado de un color distinto a los otros dos, tales que son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución:

Si existe un punto, V, verde en alguna de las rectas $y=0$, $y=1$ ya está; los puntos $(0,0),(0,1)$ y V son los vértices de un triángilo rectángulo.

En caso contrario estas rectas solo tienen puntos rojos y azules. Ahora, dado un punto, V, verde cualquiera en el plano, la recta vertical que pasa por él corta a la recta $y=0$, en un punto, P, rojo o azul, si esta recta tiene al menos un punto rojo y otro azul entonces ya está; los puntos V, P y un punto, $S:(n,0)$, de color azul o rojo contrario al de P, forman un triángulo rectángulo; igualmente aplicamos este argumento a la recta $y=1$.

En caso contrario tenemos que las rectas $y=0$, $y=1$ son de igual color.

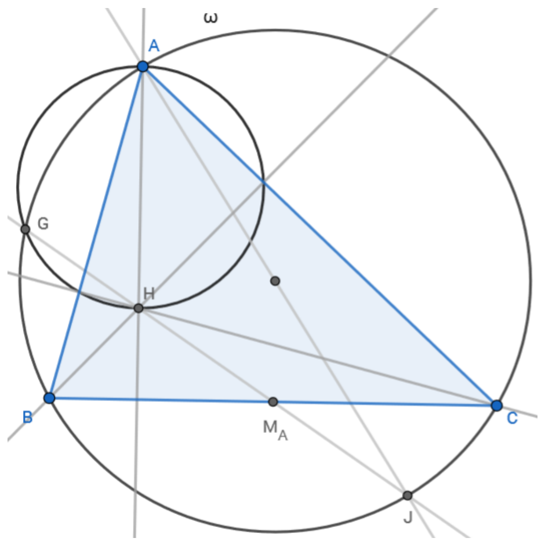
Dado un punto cualquiera de la forma $(0,n),[n\in\mathbb{Z}]$, podemos escoger o el $(0,0)$ o el $(0,1)$ (cualquiera de estos dos que sea de un color distinto al punto $(0,n)$ escogido valdrá) y razonar análogamente a como lo hemos hecho con $(0,0)$ y $(0,1)$; llegamos así a la conclusión de que si la recta de ecuación $y=n$ tiene un par de puntos de diferente color entonces existe tal triángulo rectángulo.

En caso contrario todas las rectas de ecuación $y=n$ están compuestas de puntos de un único color, pero es fácil de ver que en tal caso también podemos construirnos un triángulo rectángulo.

Para ello es fácil ver que sin perdida de generalidad, las recta $y=a$, $y=a+1$ e $y=b$ son de diferentes colores. Luego el triángulo de puntos $(0,a),(1,a+1)$ y $(a+b-2,b)$ es rectángulo.

3. Sea H el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$. Sea M_A el punto medio del lado BC. Sea G el segundo punto de corte de la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$ con la circunferencia de diámetro AH, demuestra que G, H y M_A son colineares.

Solución:



Por estar G sobre la circunferencia de diámetro AH se tiene $\angle AGH = 90°$

Llamemos ω a la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$. Sea J tal que M_A es punto medio del segmento HJ, es decir, J es el simétrico de H respecto al punto M_A, es fácil ver que:

- J está sobre ω:

Por suma de ángulos opuestos en el cuadrilátero convexo $BACJ$, ya que $\angle BAC + \angle CJB = \angle BAC + \angle BHC = 180°$, donde la primera igualdad se sigue de ser H y J simétricos respecto del punto medio de BC y la segunda es pura caza de ángulos, por lo tanto B, A, C y J están sobre la misma circunferencia, ω.

- J es el punto diametralmente opuesto a A en ω:

Ya que $\angle ACJ = \angle ACB + \angle BCJ = \angle ACB + \angle CBH = 90°$y por lo tanto AJ es diámetro de ω.

Al estar G sobre la circunferencia de diámetro AJ se tiene $\angle AGJ = 90°$y por lo tanto $\angle AGH = \angle AGJ$ de dónde se sigue que G, H y J son colineares. Pero H, M_A y J también son colineares por construcción de J, luego se sigue que los cuatro puntos G, H, M_A y J son colineares. La colinearidad de estos tres primeros prueba el enunciado.

4. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$, tales que $a+b+c=1$ prueba que:

$$(\frac{a}{a-1})^2 + (\frac{b}{b-1})^2 + (\frac{c}{c-1})^2 \geq \frac{3}{4}$$

Solución 1: Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$[(\frac{a}{b+c})^2 + (\frac{b}{a+c})^2 + (\frac{c}{a+b})^2][1+1+1] \geq [(\frac{a}{b+c}) + (\frac{b}{a+c}) + (\frac{c}{a+b})]^2$$

Luego si probamos que

$$[(\frac{a}{b+c}) + (\frac{b}{a+c}) + (\frac{c}{a+b})] \geq \frac{3}{2}$$

ya estaría.

Solución 2: Por la desigualdad entre la media cuadrática y la aritmética.

$$\sqrt{\frac{(\frac{a}{b+c})^2 + (\frac{b}{a+c})^2 + (\frac{c}{a+b})^2}{3}} \geq \frac{(\frac{a}{b+c}) + (\frac{b}{a+c}) + (\frac{c}{a+b})}{3}$$

Luego si probamos que

$$[(\frac{a}{b+c}) + (\frac{b}{a+c}) + (\frac{c}{a+b})] \geq \frac{3}{2}$$

ya estaría.

Desigualdad de Nesbitt:

$$[(\frac{a}{b+c}) + (\frac{b}{a+c}) + (\frac{c}{a+b})] \geq \frac{3}{2}$$

$$[(\frac{a}{b+c}) + 1 + (\frac{b}{a+c}) + 1 + (\frac{c}{a+b}) + 1] \geq \frac{3}{2} + 3$$

$$[(\frac{a+b+c}{b+c}) + (\frac{a+b+c}{a+c}) + (\frac{a+b+c}{a+b})] \geq \frac{9}{2}$$

$$[(\frac{1}{b+c}) + (\frac{1}{a+c}) + (\frac{1}{a+b})] \geq \frac{9}{2}$$

$$[\frac{(\frac{1}{b+c}) + (\frac{1}{a+c}) + (\frac{1}{a+b})}{3}] \geq \frac{3}{(b+c)+(a+c)+(a+b)} = \frac{3}{2}$$

Donde la última desigualdad es consecuencia de la desigualdad entre la media artimética y la media armónica.